



Cikkek

---

Bejegyzések

---

Témakörök

---

Impresszum

---

# Útügyi lapok

# 3

*Bejegyzés*

## Útpályaszerkezetek modellezése 3. rész

Szerző **Primusz Péter** és **Szentpéteri Ibolya**

*Ez a bejegyzés azzal a céllal jött létre, hogy a kedves érdeklődő olvasónak egy tömör összefoglalót nyújtson az útpályaszerkezetek modellezési lehetőségeiről. Terveink szerint az egyes számítási módszerekről később részletes összefoglaló írásokat is közreteszünk, amelyek segítségével már a gyakorló mérnökök is elvégezhetik méretezési számításaikat.*

### **Mechanikai alapon álló méretezési eljárások**

A valós világ végtelen és bonyolult. Minél mélyebbre hatolunk az elemzésbe, annál bonyolultabb. A lebontásban tehát valahol meg kell állnunk, illetve szelektálnunk kell. Az absztrakció a valós világ leegyszerűsítése a lényegre koncentráció érdekében. Az egyes objektumok csak azon tulajdonságait és viselkedésmódjait vesszük figyelembe, melyek célunk elérése érdekében feltétlenül szükségesek. Pontosan ezért a hajlékony pályaszerkezetnek a forgalmi és környezeti terhelésekre gyakorolt reakcióját elemző szerkezeti modellek a lekülönböző bonyolultságú fokúak lehetnek (Gáspár, 2003).

A pályaszerkezet reakcióinak mechanikai modellekkel való megfogalmazása a valóságos

fizikai jelenségek idealizálásán majd annak matematikai formulákba való öntésén alapul. Az összes kialakult reakciómodell él valamilyenféle kiindulási és korlátzó feltételekkel melyek legtöbbsége parciális differenciálegyenletekkel fogalmazható meg. A matematikából ismeretes határérték-probléma megoldására két lehetőség kínálkozik: (a) az analitikus vagy klasszikus módszer, és (b) a numerikus vagy közelítő eljárások. Az analitikus eljárások egyik szemléletes példája a rugalmas rétegek elmélete (Burmister, 1945) és a vékony lemezek megoldása (Westergaard, 1926). A numerikus megoldások közül pedig a véges- és a diszkrét elemek módszerét érdemes megemlíteni. A modell kialakításakor a következő feltételezésekkel szokás élni:

1. homogén anyagtulajdonságok,
2. véges rétegvastagságok, a végtelen vastagságúnak tekintett legalsó réteg kivételével,
3. izotróp anyagtulajdonságok,
4. tökéletesen érdes határfelületek a rétegek között (vagyis tapadás),
5. nyírófeszültségek hiánya a kopóréteg felületén,
6. az anyagok lineárisan rugalmasak és Hooke-törvényét követik,
7. a terhelést statikusnak és kör alakú felületen egyenletesen megoszlónak tételezzük fel.

Az iménti felsorolást végigtekintve könnyedén beláthatjuk, hogy a kialakított modellel nem lehet megfelelően jellemezni a hajlékony pályaszerkezeteket, mivel a valóságban nem állják meg helyüket feltételezéseink. A burkolat egyes rétegeinek végtelen vízszintes méreteinek feltételezése ezeknek a modelleknek az egyik legnagyobb hátrányuk. Ennek ellenére mindenképpen nagy szerepe van abban, hogy az eddigi tapasztalati összefüggéseket sikeresen tudja helyettesíteni megfelelő bemenő paraméterek birtokában, és így sokkal jobban lehet megvalósítani a helyi viszonyokhoz való alkalmazkodást aszfaltburkolatok esetén. Mielőtt rátérnék a legismertebb méretezési szoftverek ismertetésére, érdemes gyorsan áttekinteni, hogy hogyan és milyen elvek mentén fejlődtek ki azok az eljárások, amiket a mai modern számítógépes programok is használnak működésük közben.

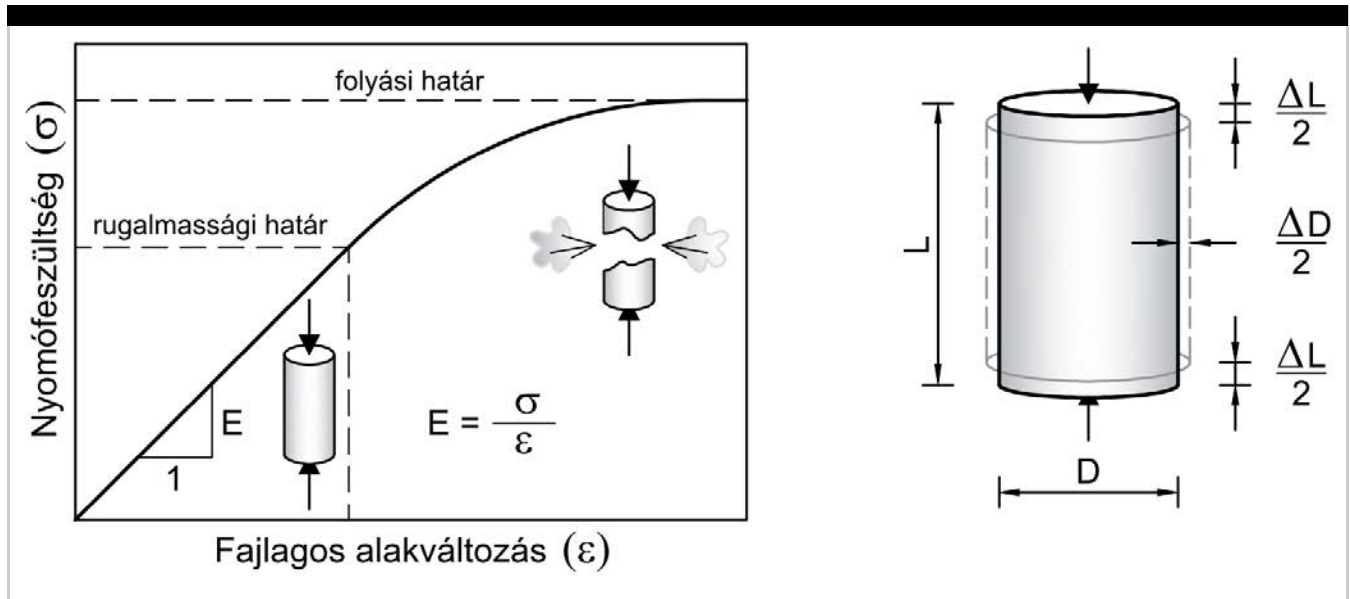
## **Az általános Hooke-törvény és a Young-modulus**

A Hooke-törvény kimondja, hogy egy rugalmas test alakváltozása arányos azzal az erővel, mely az alakváltozást okozza. Azokat az anyagokat, melyek a Hooke-törvényt követik, lineáris-rugalmas, vagy Hooke-anyagoknak nevezik. A törvényt a 17. században élt fizikusról, Robert Hooke-ról nevezték el. Azokban a rendszerekben, melyek a Hooke-törvényt követik, a megnyúlás egyenesen arányos a terheléssel. Az alakváltozás jellemzésére érdemes bevezetni a relatív hosszváltozást megadó  $\epsilon = \Delta/l$  deformációt, a külső hatást pedig célszerű a keresztmetszetre merőlegesen ható erő és a keresztmetszet  $\sigma = F/A$  hányadosával jellemezni. Ezekkel a mennyiségekkel a Hooke-törvényt  $\sigma - \epsilon$  alakba írható:

$$\sigma = E * \epsilon \quad (1)$$

ahol az E arányossági tényező a Young-modulus, ami kísérleti úton határozható meg. A Young-modulus adott külső körülmények (pl. adott hőmérséklet) mellett a tapasztalat szerint csak az anyagi minőségtől függ. Az itt bevezetett  $\sigma$  mennyiséget (felületre merőleges erő és

a felület hányadosa) általában normális feszültségnek nevezik, nyújtás esetén használatos még a húzófeszültség-, összenyomásnál pedig a nyomás elnevezés. A nyomás jelölésére  $\sigma$  helyett rendszerint a  $p$  szimbólumot használják.



1. ábra

A Young-modulus és a Poisson-féle tényező értelmezése

Mérnökök számára az anyagtulajdonságok közül talán legfontosabb a  $\sigma$  -  $\epsilon$  diagramok, vagyis a feszültség és alakváltozás összefüggések ismerete. Ez kísérlet útján nyerhető, ilyen pl. az egyirányú nyomókísérlet. A kísérlet eredményeit grafikusán ábrázolva a következő megállapítások tehetők:

- Az útépitési anyagok esetén a terhelés kezdeti szakaszában általában a Hooke-féle rugalmassági viszonyokat tekinthetjük érvényesnek ahol a feszültség és az alakváltozás jellege lineáris összefüggést követ. Ezt nevezzük rugalmas alakváltozási szakasznak.
- A terhelés további növekedésekor a képlékeny testekben kialakul egy olyan feszültség, amikor ez a jelleg eltér a lineáristól, az alakváltozás mértéke mintegy „meglódul” a feszültséghez képest. Az alakváltozásnak ez a szakasza a maradó vagy képlékeny alakváltozás tartománya. A rugalmas és a maradó alakváltozás között a különbséget a visszafordíthatóságban lehet megfogalmazni: a rugalmas alakváltozási szakaszban a terhelés megszűnése után a darab visszanyeri kiinduló méretét, alakját, míg a maradó alakváltozási szakaszban nincs meg ez a „visszaállás”, a képlékeny alakváltozásra tehát az irreverzibilitás jellemző.
- A rugalmas és a képlékeny alakváltozási szakaszt általában egyetlen feszültség-alakváltozás értékpárral jellemzett ponttal szokás elválasztani, ezt hívjuk rugalmassági határnak vagy folyáshatárnak.

Fontos megjegyeznünk, hogy a rugalmassági modulus nem anyagállandó és nem is lehet megmérni közvetlenül. A rugalmassági vagy Young-modulus sokkal inkább technikai

állandó, hiszen nagysága nagymértékben függ attól a technikától, amivel meghatározzuk.

## Haránt összehúzódás és tágulás, avagy a Poisson-féle tényező

Ha a rúd nyújtásánál vagy összenyomásánál bekövetkező alakváltozást pontosabban megvizsgáljuk, akkor azt találjuk, hogy a rúd haránt irányú mérete is megváltozik, ami a rúd húzásánál haránt összehúzódást, a rúd összenyomásánál pedig haránt tágulást jelent (Tóth, 2007).

Ha a viszonylagos (fajlagos) összenyomódás:  $\epsilon_h = \Delta l/l$  és a  $\epsilon_k = \Delta d/d$  viszonylagos fajlagos kiterjedés akkor

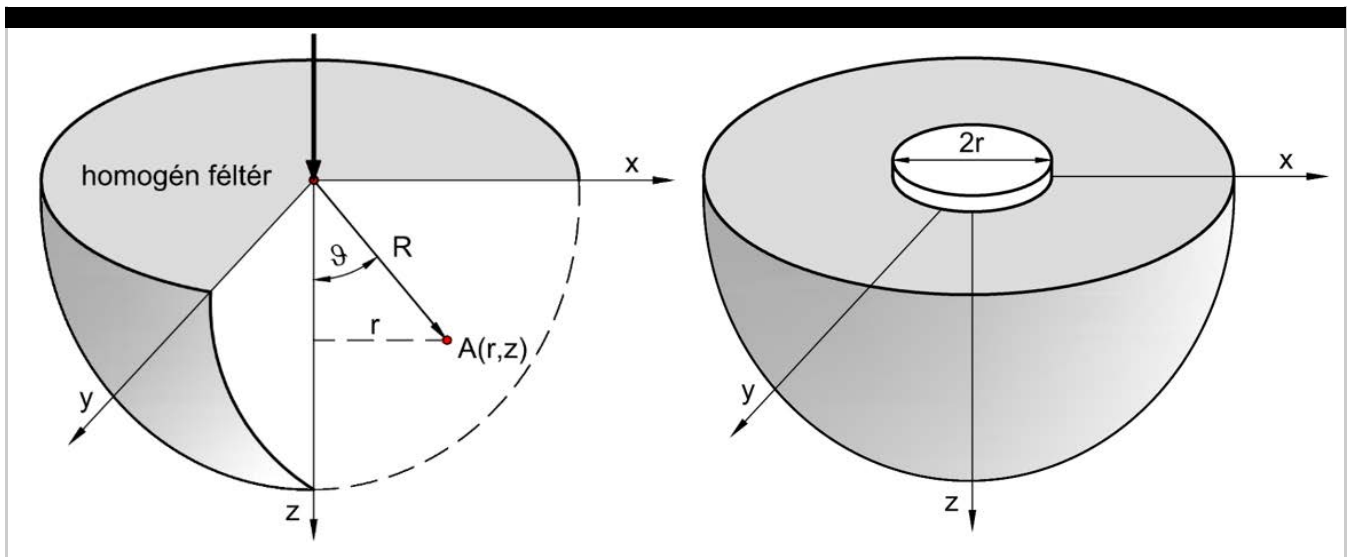
$$\frac{\epsilon_k}{\epsilon_h} = \mu = \frac{\epsilon_k E}{\sigma} \quad (2)$$

Ez a viszonyszám szintén az anyag alakváltozására jellemző érték, amelyet a Poisson-féle tényezőnek nevezünk. Ennek reciproka értéke:  $1/\mu = m$  a Poisson-féle szám. A tökéletesen rugalmas anyagokra nézve a  $\mu$  értéke is állandó. Mindaddig, amíg a deformációk olyan kicsik, hogy nem változtatják meg a külső erők működését, jogosan számíthatjuk az alakváltozásokat a test eredeti méretei és alakja alapján, és ha az  $E$ -re, valamint a  $\mu$ -re a már megállapított összefüggések érvényben vannak, akkor az összetett feszültségi állapotnak megfelelő alakváltozás megegyezik az egyes feszültségek által okozott alakváltozások összegével (szuperpozíció). A rugalmas anyagok alakváltozása tehát a fentiek értelmében a Hooke-törvény alapján az  $E$  és  $\mu$  értékek megadásával jellemezhető (Széchy, 1957). Az építőmérnöki gyakorlatban használt építőanyagok csak rugalmassági tartományon: az arányossági határon belül követik a Hooke-törvényt. Mivel azonban a megengedett feszültségek mindenkor az arányossági határ alatt maradnak (megfelelő kivitelezés és méretezés esetén), a feszültség ( $\sigma$ ) és az alakváltozás ( $\epsilon$ ) közötti összefüggés szempontjából gyakorlatilag rugalmas anyagoknak tekinthetők.

## A Boussinesq-féle rugalmas féltérmodell

A rugalmasságtan egyik nevezetes kontinuum feladata az úgynevezett Boussinesq-féle feladat, ami a rugalmas-izotróp homogén féltér felszínének egyetlen pontjában ható ( $F$ ) koncentrált erő hatására kialakuló feszültség és alakváltozás viszonyokat írja le (Széchy, 1957). A problémát először a francia matematikus Boussinesq oldotta meg 1885-ben, aki számítása során feltételezte, hogy a Hooke-féle törvény korlátlanul érvényes, és a féltérben az elemi test egyensúlyát a Cauchy-féle differenciálegyenlet fejezi ki. Ezen kívül figyelembe kell még venni, hogy az alakváltozást szenvedett elemi részek pontosan illeszkednek egymáshoz, amit geometriai feltételnek nevezünk. Az egyensúlyi és geometriai feltételek kielégítését az ún. Airy-féle feszültségfüggvény biztosítja. Ennek parciális differenciálhányadosai adják a feszültségkomponenseket. Most itt érdemes megállni egy pillanatra. Mi is az a homogén féltér? Talán úgy lehet a legegyszerűbben elképzelni, hogy olyan rétegződés nélküli „talajtömegről” van szó, amely vízszintes síkkal határolt, kiterjedése vízszintes irányba és a mélységbe végtelen. Persze nem csak talajokra lehet értelmezni, de hagyományosan a talajmechanika és az alapozás területén találkozhat vele először egy építőmérnök. Mi az Airy-féle feszültségfüggvény? Erre a kérdésre pedig a kedves olvasó [itt](#)

talál igen érdekes és részletes ismertetőt. Visszatérve a Boussinesq-féle rugalmas féltérmodellhez, adottak tehát egy ( $F$ ) koncentrált erő hatására kialakuló feszültségfüggvények, amelyekkel a tér bármely  $A(r, z)$  pontjára kiszámíthatók a nyomó, húzó és nyírófeszültségek. A levezetett képletek több szakirodalomban is megtalálhatóak, itt csak párat sorolunk fel: (Széchy, 1957), (Ponomarjov, 1965), (Nemesdy, 1985), (Ullidtz, 1998) és (Papagiannakis és Masad, 2008).



**2. ábra**

*A Boussinesq-féle rugalmas féltérmodell koncentrált erő (bal) és megoszló erőrendszer esetén (jobb)*

Azt még érdemes megjegyeznünk, hogy a homogén végtelen féltér feszültségfüggvényei nem függenek az anyagra jellemző Young-modulus-tól. A rugalmassági modulusnak csak az alakváltozások számításánál lesz szerepe. A homogén végtelen féltér nem ideális egy útpályaszerkezet modellezésére, mivel a legegyszerűbb szerkezet is minimum két rétegre bontható, de van itt ennél nagyobb gond is. A vizsgált esetekben legtöbbször nem koncentrált erőről, hanem valamilyen alapterületen megoszló teherről van szó. Ha a feszültségek a végtelen féltér felületén tetszőleges alakú felületen adódnak át, akkor a féltér egy adott pontjában keletkező feszültségek a Boussinesq-féle képletek integrálása útján adódnak. Ilyen esetben a feladat még egyenletesen megoszló terhelés esetén is meglehetősen bonyolult és a számítási menetet nem lehet néhány egyenlettel pontosan kielégíteni. Az utak pályaszerkezetére jutó közvetlen terhelést a nehéz szállítójárművek gumiabroncsainak közvetlen nyomása adja át az út felületére. A terhelésből adódó nyomóerő mindig megoszlik a kerék felfekvési felületén. A kerék felfekvési felületét általában  $d = 2r$  átmérőjű körlapnak tételezzük fel. Mielőtt továbbmennénk, érdemes ezt a témakört kicsit körbejárni.

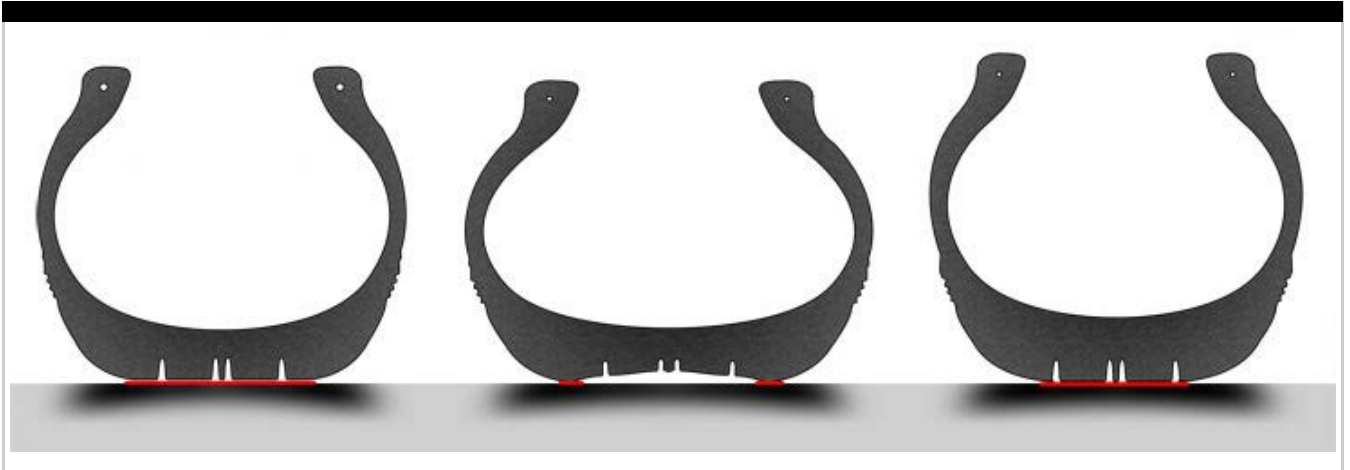
### **Pályaszerkezeteket terhelő erők leírása**

Az utak pályaszerkezetére jutó közvetlen terhelést (önsúly és raksúly) a nehéz szállítójárművek gumiabroncsainak közvetlen nyomása adja át az út felületére. A terhelésből

átadódó nyomóerő ( $F$ ) mindig megoszlik a kerék felfekvési felületén ( $A$ ). A felületegységre eső fajlagos nyomás ( $p$ ) átlagos értéke:

$$p = \frac{F}{A} \quad (3)$$

A kísérletek szerint az átadódó nyomóerő eloszlása a kerékabroncs fajtájától erősen függ. Merev abroncsú keréknél az érintkező felület derékszögű négyszög alakú. A legnagyobb fajlagos nyomóerő felület közepén keletkezik, melynek értéke az átlagos fajlagos nyomás 1,75-szörösével egyenlő.



**3. ábra**

*A gumiabroncs felfekvési felülete a) normál, b) alacsony és c) magas légnyomás mellett*

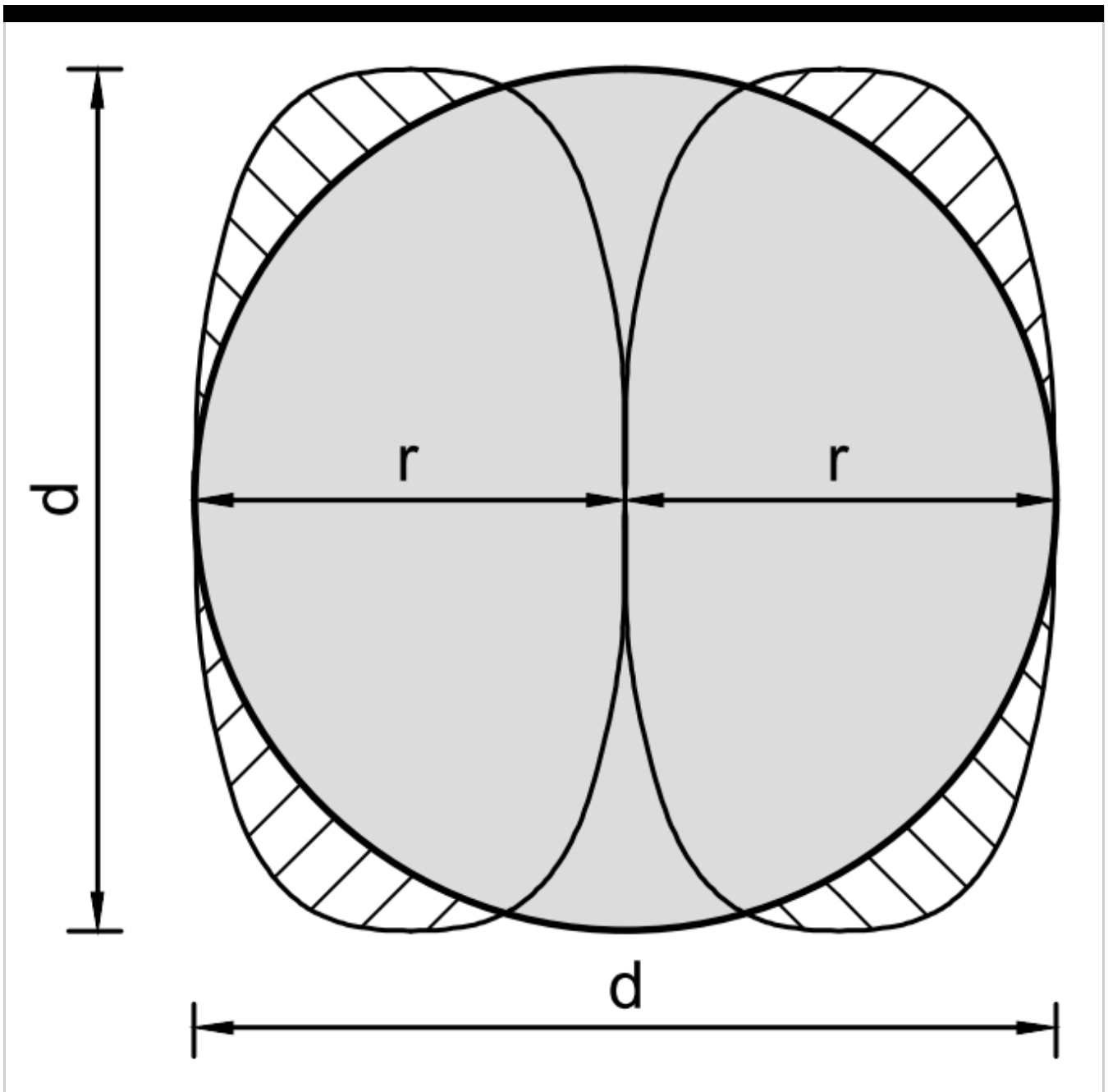
Légtömölős gumiabroncsnál a felfekvési felület ellipszis alakú, nagysága erősen függ a belső légnyomás nagyságától. Előírásnak megfelelő légnyomás esetén az útfelületre ható legnagyobb fajlagos nyomás és az átlagos fajlagos nyomás gyakorlatilag egyenlő. Az így átadott ( $p$ ) felületi nyomás körülbelül azonosnak tekinthető a gumiabroncsok előírt belső légnyomásával (megengedett kerékterhelés esetén), melynek közel legnagyobb értéke tehergépkocsik esetében  $0,6 \text{ MN/m}^2$  (6 bár). Abban az esetben, ha a két ellipszis alakú felületet (ikerabroncs esetén) egy körrel helyettesítjük, akkor felírható az ( $F$ ) kerékterhelés nagysága az

$$A = r^2 \pi \quad (4)$$

terhelő körterülettel:

$$F = A * p = r^2 \pi * p \quad (5)$$

A hazánkban alkalmazott 100 kN-os egységtengely terhelésnek  $F = 0,05 \text{ MN}$  terhelőerő felel meg kerekenként. Így a várható maximális kör alakú terhelés  $r$  sugara,  $d$  átmérője és  $p$  megoszló nyomása a következőképpen alakul tehergépkocsi esetén:  $r = 15 \text{ cm}$  azaz  $d = 30 \text{ cm}$  és ekkor  $p = 0,707 \text{ MN/m}^2$ .



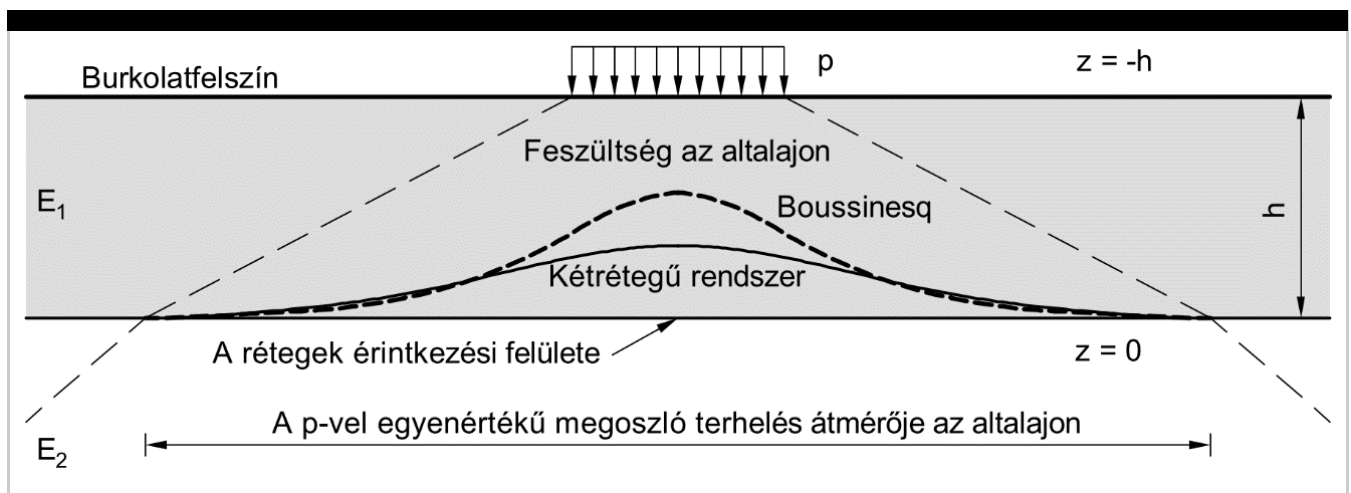
**4. ábra**

*A pályaszerkezetet terhelő körtárcsa adatai ikerabroncs esetén*

A legtöbb pályaszerkezet méretezési eljárás is az útpályaszerkezeteket terhelő kerékterhelést a fenti  $r$  (cm) sugarú,  $d$  (cm) átmérőjű körtárcsán megoszló  $p$  (MN/m<sup>2</sup>) nagyságú egyenletesen megoszló erőrendszerrel veszi számításba. Ennek több oka is van, az egyik legfontosabb, hogy ilyenkor a feladat megoldása jóval egyszerűbb (a szimmetria miatt), nincs szükség bonyolult számításokra. Persze ma már léteznek olyan szoftverek, amelyekben a terhelési felület alakja nemcsak kör, hanem négyszög alakú is lehet. Ezekben az alkalmazásokban a terhelési felület mellett a talpfeszültség eloszlást is meg lehet adni. A „pontosabb” modellek viszont nem mindig jobbak, mivel több paraméter értékét kell helyesen felvennie a tervező mérnöknek. Ha a felvett paraméterek pedig nem jól írják le a modellezett problémát, akkor az elvileg helyesebb modell rosszabb eredmények fog adni, mint egy jó közelítő számítás.

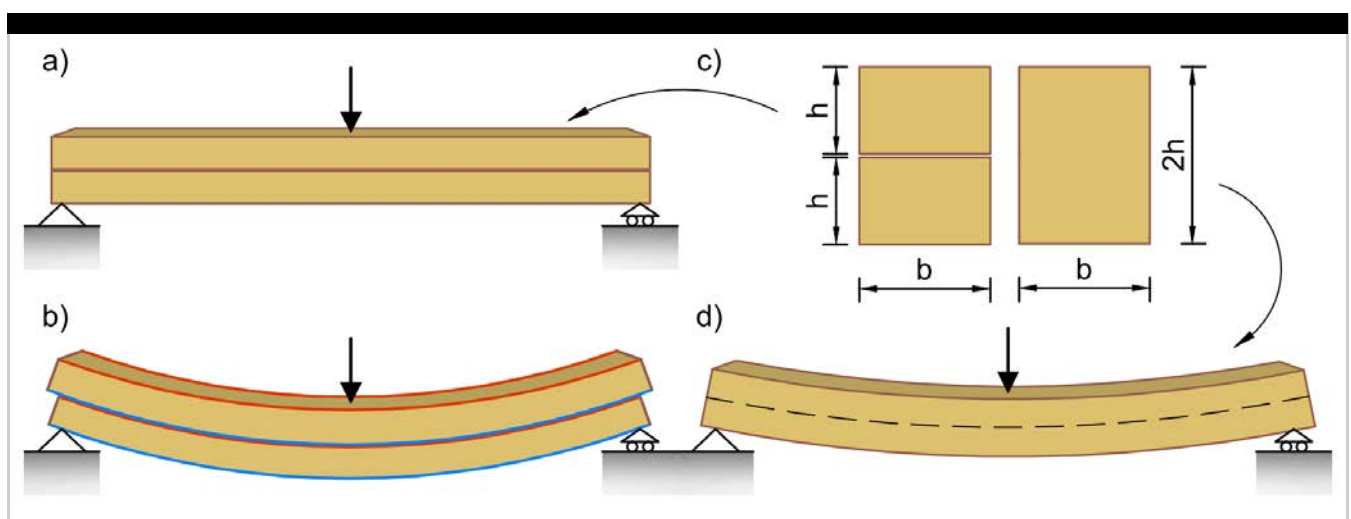
## Két vagy többrétegű pályaszerkezetek mechanikai modellje

Ha elfogadjuk azt a közelítést, hogy az altalajból és a burkolatból álló úgynevezett kétrétegű rendszerre alkalmazhatóak a matematikai rugalmasságtan törvényei olyan elméletet állíthatunk fel, amely mind a burkolat szilárdságát és alakváltozási tulajdonságait figyelembe tudja venni (Kézdi, 1954). Ennek megfelelően a kétrétegű modell egy  $h$  vastagságú,  $E_1$  rugalmassági modulussal és  $\mu_1$  Poisson-féle tényezővel bíró burkolati rétegből áll, ami egy végtelen kiterjedésű,  $E_2$  rugalmassági modulussal és  $\mu_2$  Poisson-féle tényezővel bíró alapon nyugszik (homogén végtelen féltér). A kerékterhelést itt is egy  $2r$  átmérőjű körtárcsa  $p$  egyenletesen megoszló terhelése modellezi; a feladat a felső és alsó rétegben keletkező feszültségek meghatározása.



5. ábra

Burmister kétrétegű rendszere



6. ábra

A kétfás tartó

Ennek a matematikai-mechanikai modellnek a megoldása először 1945-ben született meg

Burmister által, aki később megoldását kiterjesztett  $n$  réteg esetére is. A feladat megoldásánál rendszerint megelégszünk azzal, hogy a terhelés tengelyében ismerjük a feszültségeket, mert ezek lesznek a mérvadóak. Két esetet különböztetünk meg:

1. A két réteg érintkezési felületén tökéletes folytonosság van (teljes tapadás).
2. Az érintkezési felület súrlódásmentes (teljes elcsúszás).

A kétrétegű modell és a rétegek közötti együttműködés figyelembevétele nagy előrelépés volt az útpályaszerkezetek modellezésében. Mivel az aszfaltrétegek építése rétegenként történik, a szerkezetként való működéshez elengedhetetlen a rétegek közötti tökéletes, de legalább is a lehető legjobb együttműködés. Az aszfaltrétegek együttműködése, két réteg egymáshoz való tapadása az egyik legfontosabb pályaszerkezet építési követelmény. Ezt a hatást legkönnyebben az ún. kétfás tartón keresztül lehet bemutatni. A tartó két, egymásra helyezett, téglalap keresztmetszetű fagerendából áll. Ha a gerendák között nincs kapcsolat (mondjuk még a súrlódás együttműköztató hatásától is eltekintünk), akkor a két gerenda individuálisan külön-külön dolgozik, együttes merevségük és teherbírásuk az egy gerendára számítható merevség és teherbírás kétszerese. Ha az egymásra helyezett gerendák csatlakozási felületén az elcsúszást megakadályozzuk, azaz az individuális tartókat egységbe szervezzük, az együttműködő tartók alakváltozása lecsökken, merevsége és teherbírása megnő! A  $2h$  magasságú együttműködő keresztmetszet másodrendű nyomatóka a külön-külön számolt másodrendű nyomatókák összegének a négyszerese, a hajlításra számított határnyomatóki teherbírása a külön-külön számított határnyomatókák összegének kétszerese.

Egy valóságos útpályaszerkezetet legalább egy háromrétegű rendszerrel kell helyettesíteni a kissé reális számításhoz (Nemesdy, 1985). Ennek megfelelően Burmister kétrétegű rendszere alapján számítási módszerét kidolgozta három réteg esetére is. Ez azonban igen nagy számítási munkát jelentett akkoriban, így gyakorlati alkalmazása csak korlátozottan valósulhatott meg. Ezért a gyakorlat számára grafikon-sorozatokot készítettek, de ezek pontos leolvasása esetenként nehézkes volt. Változást hozott ezen a területen Jones munkássága, amikor 1962-ben számítógéppel kiszámította és táblázatos formában közölte Burmister háromrétegű rendszerekre vonatkozó alapegyenleteinek megoldását (Fi, 1974). A grafikonok és táblázatok nehézkes használata miatt idővel ezek a módszerek eltűntek a gyakorlatból és helyüket ma már egyértelműen a számítógépes programok vették át. Közös jellemzőjük, hogy a számításhoz előzetesen rögzíteni kell a pályaszerkezeti rétegek számát továbbá vastagságát, rugalmassági modulusát illetve Poisson tényezőjét és lehetőség szerint a rétegek közötti együttműködés mértékét. Tetszőleges terhelési adatokat inputként alkalmazva ezt követően lehetséges a pályaszerkezet adott pontján ébredő feszültségek illetve megnyúlások meghatározása.

Talán ez a bejegyzés egy kicsit hosszúra sikerült, de mindenképpen fontos volt az alapfogalmakat tisztázni, mielőtt valóban fejest ugranánk a számítógépes burkolatméretezés világában. Természetesen még mindig nagyon sok dologról nem esett szó és az eddig érintett témákat sem merítettük ki teljesen, de idővel mindenre fény derül.

## Felhasznált irodalom

A.T. Papagiannakis, E.A. Masad (2008): „Pavement design and materials”, John Wiley & Sons, p. 542

Burmister, D.M (1945): „The General Theory of Stresses and Displacements in Layered Systems” Journal of Applied Physics, Vol. 16, p.89-94

Fi István (1974): „Háromrétegű rendszerek gépi úton való lehajlásszámítása útpályaszerkezetek méretezéséhez”, Mélyépítéstudományi Szemle, XXIV. évf. 1. szám. pp. 33-36

Gáspár László (2003): „Útgazdálkodás”, Akadémia kiadó, Bp. p.364, ISBN: 9630580918

Kézdi Árpád (1954): „Talajmechanika II.”, Tankönyvkiadó, Budapest, p. 467

Nemesdy Ervin (1985): „Útpályaszerkezetek méretezésének és anyagállandó-vizsgálatainak mechanikai alapja”, Kutatási részjelentés I., BME Útépítési Tanszék, Budapest

Per Ullidtz (1998): „Modelling flexible pavement response and performance” Technical University of Denmark, ISBN 87-502-0805-5

SZ. D. Ponomarjov (1965): „Szilárdságtani számítások a gépészetben”, Harmadik kötet, Műszaki Könyvkiadó, Budapest

Széchy Károly (1957): „Alapozás”, Műszaki Könyvkiadó, 2. kiadás, Budapest

Tóth András (2007): „Kísérleti Fizika I.” BME, Kísérleti Fizika Tanszék, egyetemi jegyzet, pp.217

Westergaard, H.M. (1926). „Stresses in Concrete Pavements Computed by Theoretical Analysis” Public Roads, 7, 25-35.

[http://www.epito.bme.hu/me/oktatas/feltoltesek/BMEEOTMMST1/airy\\_es\\_a\\_feszultsegfuggvenyek.pdf](http://www.epito.bme.hu/me/oktatas/feltoltesek/BMEEOTMMST1/airy_es_a_feszultsegfuggvenyek.pdf)

*Adatok*

*Szerző*

**Primusz Péter**

Okleveles erdőmérnök és mérnök informatikus.